Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Análisis

Jueves 15 de noviembre de 2018 (tarde)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

8818 – 7228

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 10]

(a) Utilice el criterio de comparación del límite para determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2}$ converge o diverge. [5]

(b) Muestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}(x-1)^n$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$. [5]

2. [Puntuación máxima: 8]

(a) Utilice la regla de l'Hôpital para determinar el valor de

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{e^{-3x^2} + 3\cos(2x) - 4}{3x^2}\right).$$ [5]

(b) A partir de lo anterior, halle $\lim_{x \to 0}\left(\frac{\int_0^x \left(e^{-3t^2} + 3\cos(2t) - 4\right) dt}{\int_0^x 3t^2\, dt}\right)$. [3]

3. [Puntuación máxima: 14]

Considere la siguiente ecuación diferencial

$$(x+2)^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+1)\,y\text{, donde } x\neq -2$$

siendo la condición inicial $y=2$ para $x=1$.

(a) Muestre que $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=-\frac{3x+7}{(x+2)^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$. [5]

Los polinomios de Taylor, alrededor de $x=1$, se utilizan para aproximar $y(x)$.

(b) Halle el polinomio de Taylor de

(i) grado 2;

(ii) grado 3. [7]

(c) Halle la diferencia entre los valores aproximados de $y(1{,}05)$ que se obtienen utilizando cada una de las dos respuestas dadas en el apartado (b). [2]

4. [Puntuación máxima: 18]

Considere la ecuación diferencial $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+\frac{y}{x}$, donde $x\neq 0$.

(a) Sabiendo que $y(1)=1$, utilice el método de Euler con un paso $h=0{,}25$ para hallar un valor aproximado de $y(2)$. Dé la respuesta con dos cifras significativas. [4]

(b) Resuelva la ecuación $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+\frac{y}{x}$ sabiendo que $y(1)=1$. [6]

(c) Halle el porcentaje de error que se comete al aproximar el valor de $y(2)$ con la respuesta dada en la parte (a). Exprese el resultado con dos cifras significativas. [3]

Considere la familia de curvas que satisfacen la ecuación diferencial $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+\frac{y}{x}$, donde $x\neq 0$.

(d) (i) Halle la ecuación de la isoclina correspondiente a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=k$, donde $k\neq 0$, $k\in\mathbb{R}$.

(ii) Muestre que dicha isoclina nunca puede ser normal a ninguna de las integrantes de la familia de curvas que satisfacen la ecuación diferencial. [5]