Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Conjuntos, relaciones y grupos

Miércoles 18 de mayo de 2016 (mañana)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[60 puntos]**.

2216 – 7229

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 19]

La siguiente tabla de Cayley corresponde a la operación binaria multiplicación módulo 9 representada mediante el símbolo $*$, definida sobre el conjunto $S = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.

$*$	1	2	4	5	7	8
1	1	2	4	5	7	8
2	2	4	8	1	5	7
4	4	8				
5	5	1				
7	7	5				
8	8	7				

(a) Copie y complete la tabla. [3]

(b) Muestre que $\{S, *\}$ es un grupo abeliano. [5]

(c) Determine el orden de cada uno de los elementos de $\{S, *\}$. [3]

(d) (i) Halle los dos subgrupos propios de $\{S, *\}$.

(ii) Halle la clase lateral de cada uno de estos subgrupos con respecto al elemento 5. [4]

(e) Resuelva la ecuación $2 * x * 4 * x * 4 = 2$. [4]

2. [Puntuación máxima: 12]

La relación R se define sobre $\mathbb{Z}^+$ de modo tal que aRb si y solo si $b^n - a^n \equiv 0 (\bmod p)$ donde n, p son números enteros positivos fijos y mayores que 1.

(a) Muestre que R es una relación de equivalencia. [7]

(b) Sabiendo que $n = 2$ y $p = 7$, determine los cuatro primeros elementos de cada una de las cuatro clases de equivalencia de R. [5]

3. [Puntuación máxima: 7]

El grupo $\{G, *\}$ es abeliano y la función biyectiva $f: G \to G$ viene dada por $f(x) = x^{-1}, x \in G$. Muestre que f es un isomorfismo.

4. [Puntuación máxima: 13]

La función f viene dada por $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ donde $f(x, y) = \left(\sqrt{xy}, \dfrac{x}{y}\right)$.

(a) Demuestre que f es una función inyectiva. [5]

(b) (i) Demuestre que f es una función sobreyectiva.

(ii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, escriba la función inversa f^{-1}. [8]

5. [Puntuación máxima: 9]

El grupo $\{G, *\}$ está definido sobre el conjunto G, con la operación binaria $*$. H es un subconjunto de G que se define mediante $H = \{x : x \in G, a * x * a^{-1} = x \text{ para todo } a \in G\}$. Demuestre que $\{H, *\}$ es un subgrupo de $\{G, *\}$.