N15/5/MATHL/HP3/SPA/TZ0/SG

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – conjuntos, relaciones y grupos

Miércoles 18 de noviembre de 2015 (tarde)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[60 puntos]**.

8815 – 7229

4 páginas

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 5]

Dados los conjuntos A y B, utilice las propiedades de los conjuntos para demostrar que $A \cup (B' \cup A)' = A \cup B$. Justifique cada uno de los pasos de la demostración.

2. [Puntuación máxima: 14]

La función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ viene dada por $f: x \to \begin{cases} 1 & , \ x \ge 0 \\ -1 & , \ x < 0 \end{cases}$.

(a) Demuestre que f

(i) no es inyectiva;

(ii) no es sobreyectiva. [4]

La relación R se define para $a, b \in \mathbb{R}$ de manera tal que aRb si y solo si $f(a) \times f(b) = 1$.

(b) Muestre que R es una relación de equivalencia. [8]

(c) Indique las clases de equivalencia de R. [2]

3. [Puntuación máxima: 10]

El conjunto de todas las permutaciones de los elementos $1, 2, \ldots 10$ se denomina H y la operación binaria $\circ$ representa la composición de permutaciones.
La permutación $p = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9\ 10)$ genera el subgrupo $\{G, \circ\}$ del grupo $\{H, \circ\}$.

(a) Halle el orden de $\{G, \circ\}$. [2]

(b) Indique cuál es el elemento neutro de $\{G, \circ\}$. [1]

(c) Halle

(i) $p \circ p$;

(ii) el simétrico de $p \circ p$. [4]

(d) (i) Halle el máximo orden que puede tener un elemento que pertenezca a $\{H, \circ\}$.

(ii) Dé un ejemplo de un elemento que tenga este orden. [3]

4. [Puntuación máxima: 18]

La operación binaria $*$ se define sobre el conjunto $T = \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mediante $a * b = (a + b - ab)(\text{mod}\ 7),\ a, b \in T$.

(a) Copie y complete la siguiente tabla de Cayley para $\{T, *\}$. [4]

$*$	**0**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	0	2	3	4	5	6
2	2	0	6	5	4	3
3	3	6				
4	4	5				
5	5	4				
6	6	3				

(b) Demuestre que $\{T, *\}$ forma un grupo abeliano. [7]

(c) Halle el orden de cada elemento de T. [4]

(d) Sabiendo que $\{H, *\}$ es el subgrupo de $\{T, *\}$ de orden 2, dé la partición de T definida mediante las clases laterales por la izquierda con respecto a H. [3]

Véase al dorso

5. [Puntuación máxima: 13]

Un grupo $\{D, \times_3\}$ se define de manera que $D = \{1, 2\}$ y $\times_3$ es la multiplicación módulo 3.

La función $f : \mathbb{Z} \to D$ viene dada por $f : x \mapsto \begin{cases} 1, & x \text{ es par} \\ 2, & x \text{ es impar} \end{cases}$.

(a) Demuestre que la función f es un homomorfismo del grupo $\{\mathbb{Z}, +\}$ a $\{D, \times_3\}$. [6]

(b) Halle el núcleo de f. [3]

(c) Demuestre que $\{\mathrm{Ker}(f), +\}$ es un subgrupo de $\{\mathbb{Z}, +\}$. [4]
