Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Conjuntos, relaciones y grupos

Viernes 18 de noviembre de 2016 (mañana)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuaderno de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[60 puntos]**.

8816 – 7229

4 páginas

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 13]

Sea $\{G, \circ\}$ el grupo de todas las permutaciones de $1, 2, 3, 4, 5, 6$ respecto a la operación de composición de permutaciones.

(a) (i) Escriba la permutación $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ como una composición de ciclos disjuntos.

(ii) Indique el orden de α. [3]

(b) (i) Escriba la permutación $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ como una composición de ciclos disjuntos.

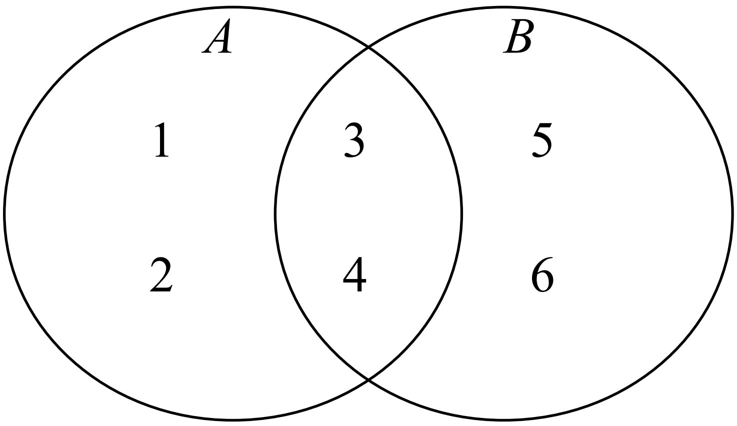
(ii) Indique el orden de β. [2]

(c) Escriba la permutación $\alpha \circ \beta$ como una composición de ciclos disjuntos. [2]

(d) Escriba la permutación $\beta \circ \alpha$ como una composición de ciclos disjuntos. [2]

(e) Indique el orden de $\{G, \circ\}$. [2]

Considere el siguiente diagrama de Venn, donde $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$.



(f) Halle el número de permutaciones en $\{G, \circ\}$ que darían como resultado el que A, B y $A \cap B$ se mantuvieran sin cambios. [2]

2. [Puntuación máxima: 21]

(a) Sea A el conjunto $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$. Sea B el conjunto $\{x \mid x \in]-1, +1[, x \neq 0\}$.

La función $f : A \to B$ se define mediante $f(x) = \frac{2}{\pi}\arctan(x)$.

(i) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(x)$ y, a partir de lo anterior, justifique si f es o no una función biyectiva.

(ii) Muestre que A es un grupo respecto a la operación binaria de la multiplicación.

(iii) Dé una razón de por qué B no es un grupo respecto a la operación binaria de la multiplicación.

(iv) Halle un ejemplo que muestre que $f(a \times b) = f(a) \times f(b)$ no se cumple para todo $a, b \in A$. [13]

(b) Sea D el conjunto $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$.

La función $g : \mathbb{R} \to D$ se define mediante $g(x) = e^x$.

(i) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = g(x)$ y, a partir de lo anterior, justifique si g es o no una función biyectiva.

(ii) Muestre que $g(a + b) = g(a) \times g(b)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

(iii) Sabiendo que $\{\mathbb{R}, +\}$ y $\{D, \times\}$ son grupos, explique si son o no isomorfos. [8]

3. [Puntuación máxima: 15]

Un grupo abeliano, $\{G, *\}$, consta de 12 elementos diferentes que son de la forma $a^i * b^j$ donde $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y $j \in \{1, 2, 3\}$. Los elementos a y b son tales que $a^4 = e$ y $b^3 = e$ donde e es el elemento neutro.

(a) Indique los posibles órdenes que pueden tener los elementos de $\{G, *\}$ y, para cada orden, dé un ejemplo de un elemento de ese orden. [8]

Sea $\{H, *\}$ aquel subgrupo propio de $\{G, *\}$ que tiene el máximo orden posible.

(b) (i) Indique un generador para $\{H, *\}$.

(ii) Escriba los elementos de $\{H, *\}$.

(iii) Escriba los elementos de la clase lateral de H que contiene a a. [7]

4. [Puntuación máxima: 11]

Una relación S se define sobre $\mathbb{R}$ del siguiente modo: aSb si y solo si $ab > 0$.

(a) Muestre que S

(i) no es reflexiva;

(ii) es simétrica;

(iii) es transitiva. [4]

Una relación R se define sobre un conjunto no vacío A. R es simétrica y transitiva pero no es reflexiva.

(b) Explique por qué existe un elemento $a \in A$ que no está relacionado consigo mismo. [1]

(c) A partir de lo anterior, demuestre que hay al menos un elemento de A que no está relacionado con ningún otro elemento de A. [6]