Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Estadística y probabilidad

Miércoles 9 de mayo de 2018 (tarde)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

2218 – 7230

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 11]

Los pesos, X kg, de los machos de una determinada especie de ave se puede suponer que siguen una distribución normal de media 4,8 kg y desviación típica 0,2 kg.

(a) Halle la probabilidad de que un macho de esta especie elegido al azar pese entre 4,75 kg y 4,85 kg. [1]

Los pesos, Y kg, de las hembras de esa misma especie de ave se puede suponer que siguen una distribución normal de media 2,7 kg y desviación típica 0,15 kg.

(b) Halle la probabilidad de que el peso de un macho elegido al azar sea más del doble del peso de una hembra elegida al azar. [6]

(c) Dos machos elegidos al azar y tres hembras elegidas al azar se colocan sobre una báscula cuyo límite de peso es 18 kg. Halle la probabilidad de que el peso total de estas cinco aves sea mayor que el límite de peso. [4]

2. [Puntuación máxima: 8]

Considere un dado tetraédrico (de cuatro lados) equilibrado, cuyas caras están rotuladas con un 1, un 2, un 3 y un 4 respectivamente.
La variable aleatoria X representa el número de veces que hay que tirar el dado para obtener un 1.

(a) Indique la distribución de X. [1]

(b) Muestre que $G(t)$, la función generatriz de probabilidad para X, viene dada por $G(t) = \dfrac{t}{4-3t}$. [4]

(c) Halle $G'(t)$. [2]

(d) Determine la media del número de veces que hay que tirar el dado para obtener un 1. [1]

3. [Puntuación máxima: 12]

La duración de la batería de un teléfono móvil se define como el número de horas que se puede utilizar una batería completamente cargada antes de que el teléfono deje de funcionar. Una empresa afirma que, para uno de sus modelos de teléfono móvil, la duración promedio de la batería es de 9,5 horas. Para contrastar esta afirmación, se realiza un experimento con una muestra aleatoria compuesta por 20 teléfonos móviles de este modelo. Se mide la duración de la batería, b horas, de cada teléfono móvil y luego se calcula la media muestral, $\bar{b}$. Se puede suponer que las duraciones de las baterías siguen una distribución normal, con una desviación típica igual a 0,4 horas.

(a) Indique hipótesis apropiadas para un contraste de dos colas. [1]

(b) Halle la región crítica para contrastar $\bar{b}$ a un nivel de significación del 5 %. [4]

Más tarde se halla que la duración promedio de la batería para este modelo de teléfono móvil es de 9,8 horas.

(c) Halle la probabilidad de cometer un error de tipo II. [3]

Se decide analizar otro modelo de teléfono móvil, cuya duración de batería se puede suponer que sigue una distribución normal de media μ horas y desviación típica 1,2 horas. Un investigador mide la duración de la batería de seis de estos teléfonos móviles y calcula para μ un intervalo de confianza de $[10{,}2\,;\,11{,}4]$.

(d) Calcule el nivel de confianza de este intervalo. [4]

Véase al dorso

4. [Puntuación máxima: 11]

Las variables aleatorias X, Y siguen una distribución normal bidimensional con coeficiente de correlación momento-producto ρ.

(a) Indique hipótesis apropiadas para investigar si existe o no una relación lineal negativa entre X e Y. [1]

Se obtuvo una muestra aleatoria compuesta por 11 observaciones de X, Y, se calculó el coeficiente de correlación momento-producto, r, y el resultado fue $-0{,}708$.

(b) (i) Determine el valor del parámetro p.

(ii) Indique su conclusión, a un nivel de significación del 1 %. [4]

La covarianza de las variables aleatorias U, V se define mediante

$$\mathrm{Cov}(U, V) = \mathrm{E}\big((U - \mathrm{E}(U))(V - \mathrm{E}(V))\big).$$

(c) (i) Muestre que $\mathrm{Cov}(U, V) = \mathrm{E}(UV) - \mathrm{E}(U)\mathrm{E}(V)$.

(ii) A partir de lo anterior, muestre que, si U, V son variables aleatorias independientes, entonces el coeficiente de correlación momento-producto de la población, ρ, es igual a cero. [6]

5. [Puntuación máxima: 8]

La variable aleatoria X sigue una distribución binomial con parámetros n y p.

(a) Muestre que $P = \dfrac{X}{n}$ es un estimador sin sesgo de p. [2]

Sea $U = nP(1 - P)$.

(b) (i) Muestre que $\mathrm{E}(U) = (n - 1)p(1 - p)$.

(ii) A partir de lo anterior, escriba un estimador sin sesgo de $\mathrm{Var}(X)$. [6]