Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Estadística y probabilidad

Jueves 16 de noviembre de 2017 (tarde)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

8817 – 7230

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 7]

Una variable aleatoria continua T tiene una función densidad de probabilidad definida por

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t\left(4-t^2\right)}{4}, & 0 \le t \le 2 \\ 0, & \text{resto de valores} \end{cases}.$$

(a) Halle la función de distribución de probabilidad acumulada $F(t)$, para $0 \le t \le 2$. [3]

(b) (i) Dibuje aproximadamente el gráfico de $F(t)$ para $0 \le t \le 2$, indicando claramente las coordenadas de los extremos.

(ii) Sabiendo que $\mathrm{P}(T < a) = 0{,}75$, halle el valor de a. [4]

2. [Puntuación máxima: 8]

Anne es una agricultora que cultiva calabazas y luego las vende. Como le interesa saber cuánto pesan las calabazas de su cosecha, coge ocho calabazas y anota los pesos, con los siguientes resultados en kilogramos.

$$7{,}7 \quad 7{,}5 \quad 8{,}4 \quad 8{,}8 \quad 7{,}3 \quad 9{,}0 \quad 7{,}8 \quad 7{,}6$$

Suponga que estos pesos constituyen una muestra aleatoria tomada de una distribución $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.

(a) Determine estimaciones sin sesgo de μ y de σ^2. [3]

(b) Anne afirma que la media de los pesos de las calabazas es igual a $7{,}5$ kilogramos. Con el fin de contrastar esta afirmación, plantea la hipótesis nula $\mathrm{H}_0 : \mu = 7{,}5$.

(i) Utilice un contraste de dos colas para determinar el valor del parámetro p correspondiente a los resultados anteriores.

(ii) Interprete el valor del parámetro p que ha obtenido, a un nivel de significación del 5%, y justifique su conclusión. [5]

3. [Puntuación máxima: 12]

Una variable aleatoria X sigue una distribución de media μ y varianza igual a σ^2. De la distribución de X se toman dos muestras aleatorias independientes de tamaño n_1 y n_2. Las medias muestrales son $\overline{X_1}$ y $\overline{X_2}$, respectivamente.

(a) Muestre que $U = a\overline{X_1} + (1-a)\overline{X_2}$, $a \in \mathbb{R}$, es un estimador sin sesgo de μ. [3]

(b) (i) Muestre que $\operatorname{Var}(U) = a^2 \dfrac{\sigma^2}{n_1} + (1-a)^2 \dfrac{\sigma^2}{n_2}$.

(ii) Halle, en función de n_1 y n_2, una expresión para a que permita calcular el estimador más eficiente que tenga esta forma.

(iii) A partir de lo anterior, halle una expresión para el estimador más eficiente e interprete el resultado. [9]

4. [Puntuación máxima: 8]

Las variables aleatorias U y V siguen una distribución normal bidimensional cuyo coeficiente de correlación momento-producto es igual a ρ.

(a) Indique hipótesis apropiadas para investigar si U y V son o no independientes. [2]

Para determinar si existe una correlación entre U y V, se toma una muestra aleatoria compuesta por 12 observaciones de U y V. Sea r el coeficiente de correlación momento-producto de la muestra. Se lleva a cabo un contraste, a un nivel de significación del 1%, para determinar si U y V son o no independientes.

(b) Halle el menor valor de $|r|$ para el cual la conclusión del contraste es que $\rho \neq 0$. [6]

5. [Puntuación máxima: 15]

La variable aleatoria X sigue una distribución de Poisson de media λ. La función generatriz de probabilidad de X viene dada por $G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$.

(a) (i) Halle expresiones para $G'_X(t)$ y para $G''_X(t)$.

(ii) A partir de lo anterior, muestre que $\mathrm{Var}(X) = \lambda$. [5]

La variable aleatoria Y, que es independiente de X, sigue una distribución de Poisson de media μ.

(b) Partiendo de $G_{X+Y}(t)$, que es la función generatriz de probabilidad de $X+Y$, muestre que $X+Y$ sigue una distribución de Poisson de media $\lambda+\mu$. [3]

(c) (i) Muestre que $\mathrm{P}(X = x \mid X+Y = n) = \binom{n}{x}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-x}$, donde n, x son números enteros no negativos y $n \geq x$.

(ii) Identifique la distribución de probabilidad dada en el apartado (c)(i) e indique sus parámetros. [7]