Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Estadística y probabilidad

Jueves 15 de noviembre de 2018 (tarde)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

8818 – 7230

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 9]

Sean dos variables aleatorias independientes X e Y que siguen una distribución de Poisson. Sabiendo que $\mathrm{E}(X) = 3$ y $\mathrm{E}(Y) = 4$, calcule

(a) $\mathrm{E}(2X + 7Y)$; [2]

(b) $\mathrm{Var}(4X - 3Y)$; [3]

(c) $\mathrm{E}(X^2 - Y^2)$. [4]

2. [Puntuación máxima: 9]

El tiempo t, en minutos que tardan en llegar al trabajo una muestra aleatoria de 75 trabajadores de una empresa se puede resumir del siguiente modo

$$\sum t = 2165, \ \sum t^2 = 76475.$$

Sea T la variable aleatoria que representa el tiempo que tarda en llegar al trabajo un trabajador de esta empresa.

(a) Halle una estimación sin sesgo de

(i) la media de T;

(ii) la varianza de T. [3]

(b) Suponiendo que T sigue una distribución normal, halle

(i) el intervalo de confianza del 90 % correspondiente a la media del tiempo que tardan en llegar al trabajo los trabajadores de esta empresa;

(ii) el intervalo de confianza del 95 % correspondiente a la media del tiempo que tardan en llegar al trabajo los trabajadores de esta empresa. [3]

Antes de ver estos resultados, el director general creía que la media del tiempo T era 26 minutos.

(c) Explique si las respuestas que ha dado en el apartado (b) respaldan esta creencia. [3]

3. [Puntuación máxima: 21]

(a) El Sr. Sailor tiene una piscifactoría. Según él, el peso de los peces en uno de sus estanques tiene una media de 550 gramos y una desvación típica de 8 gramos.

Suponga ahora que los pesos de los peces siguen una distribución normal y que la afirmación del Sr. Sailor es cierta.

(i) Halle la probabilidad de que un pez de este estanque tenga un peso superior a 560 gramos.

(ii) El peso máximo que soporta una red de pescar es de 6 kg. Halle la probabilidad de que la red manual sea capaz de soportar una captura compuesta por 11 de estos peces. [6]

(b) Kathy no cree en la afirmación de Sr. Sailor sobre la media y el desviación típica del peso de los pescados. Recoge entonces una muestra aleatoria de peces del estanque y muestra sus pesos en la siguiente tabla.

Pez	A	B	C	D	E	F	G	H
Peso (g)	545	554	548	551	558	541	543	549

Utilizando estos datos, contraste la hipótesis nula $H_0: \mu = 550$, frente a la hipótesis alternativa $H_1: \mu < 550$, donde μ gramos es la media poblacional del peso. Utilice un nivel de significación del 5%.

(i) Indique cuál es la distribución del estadístico de este contraste incluido el parámetro.

(ii) Halle el valor del parámetro p correspondiente a este contraste.

(iii) Indique cuál es la conclusión de este contraste y justifique su respuesta. [6]

(c) Kathy decide utilizar la misma muestra de peces para contrastar, a un nivel de significación del 5%, si existe o no una relación positiva entre el peso y la longitud de los peces que hay en el estanque. La siguiente tabla muestra la longitud de los peces de la muestra. Se puede suponer que las longitudes de los peces siguen una distribución normal.

Pez	A	B	C	D	E	F	G	H
Longitud (mm)	351	365	355	353	357	349	348	354

(i) Escriba las hipótesis que considere apropiadas para el contraste.

(ii) Halle el coeficiente de correlación momento-producto r.

(iii) Indique el valor del parámetro p e interprételo en este contexto. [6]

(d) Utilice una recta de regresión que resulte apropiada para estimar el peso de un pez que tiene una longitud de 360 mm. [3]

4. [Puntuación máxima: 11]

Sea $X \sim \text{Geo}(p)$.

(a) Muestre que la función generatriz de probabilidad de X viene dada por

$$G_X(t) = \frac{pt}{1-qt}, \text{ donde } q = 1 - p.$$ [3]

(b) A partir de lo anterior, demuestre que $\text{E}(X) = \dfrac{1}{p}$. [4]

(c) Halle la función generatriz de probabilidad de la variable aleatoria $Y = 2X + 3$. [4]